

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ
ДВУХФАЗНОЙ БИНАРНОЙ СИСТЕМЫ**

В.Р.ИБРАГИМОВ, Т.К.РАМАЗАНОВ, В.Ю.БАБАНЛЫ
Бакинский Государственный Университет

Рассматривается пространственная задача о нестационарной фильтрации двухфазной газоконденсатной системы к центральной несовершенной скважине в однородно-изотропной области пористой среды. На основе разработанного нами приближенного метода численно исследовано передвижение границ зон от времени.

Теория фильтрации газоконденсата, основанная бинарной моделью, математически требует решение системы двух нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с переменными коэффициентами, описывающие процесс фильтрации фаз системы [1-3]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\frac{k_q(\rho) p \beta [1 - C(\rho) \gamma(p)]}{\mu_q(p) Z(p) p_{at}} + \frac{k_k(\rho) s_k(p)}{\mu_k(p) a_k(p)} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[\frac{k_q(\rho) p \beta [1 - C(\rho) \gamma(p)]}{\mu_q(p) Z(p) p_{at}} + \frac{k_k(\rho) s_k(p)}{\mu_k(p) a_k(p)} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} = \\
 & = \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(1-\rho) p \beta}{Z(p) p_{at}} [1 - C(\rho) \gamma(p)] + \rho \frac{s_k(p)}{a_k(p)} \right\}, \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\frac{k_q(\rho) p \beta C(\rho)}{\mu_q(p) Z(p) p_{at}} + \frac{k_k(\rho)}{\mu_k(p) a_k(p)} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[\frac{k_q(\rho) p \beta C(\rho)}{\mu_q(p) Z(p) p_{at}} + \frac{k_k(\rho)}{\mu_k(p) a_k(p)} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} = \\
 & = \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{a_k(p)} + (1-\rho) \frac{\rho \beta C(p)}{Z(p) p_{at}} \right\}, \tag{1}
 \end{aligned}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$p(r, z, t) = p_0 \text{ и } \rho(r, z, t) = 0 \text{ при } t = 0, r_c \leq r \leq R_k;$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } h, r_c \leq r \leq R_k;$$

$$p(r, z, t) = p_k = p_0 = \text{const} \text{ при } r = R_k, 0 \leq z \leq h \text{ в I фазе течения};$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \text{ при } p_k(t) < p_0, r = R_k, 0 \leq z \leq h \text{ во II фазе течения};$$

$$p(r, z, t) = p_c(t), \text{ при } r = r_c, h_1 \leq z \leq h, \Delta p = p_k(t) - p_c(t) = \text{const},$$

$$\rho(r, z, t) = 0 \text{ при } r = r_c, h_1 \leq z \leq h,$$

$$p(r, z, t) = \text{const} \text{ при } r = r_c, 0 \leq z \leq h,$$

$$\rho(r, z, t) = \rho_c(t), \text{ при } r = r_c, 0 \leq z \leq h,$$

где k - абсолютная проницаемость среды; p - текущее давление; p_0 - начальное давление системы; ρ - коэффициент насыщенности жидкой фазы (конденсата); остальные обозначения общепринятые [1-3].

Когда давление выше давления начала конденсации (точка росы) в области фильтрации имеется только одна фаза - газ.

При понижении давления в какой-то точке области ниже давления начала конденсации p_{nk} , выделяется жидкая фаза-конденсат и начинается двухфазное течение. Надо отметить, что для каждого компонентного состава смеси имеется вполне определенное постоянное значение p_{nk} . После образования жидкой фазы в области течения (пласте), постепенно образуются сначала две зоны, затем три зоны (рис. 1).

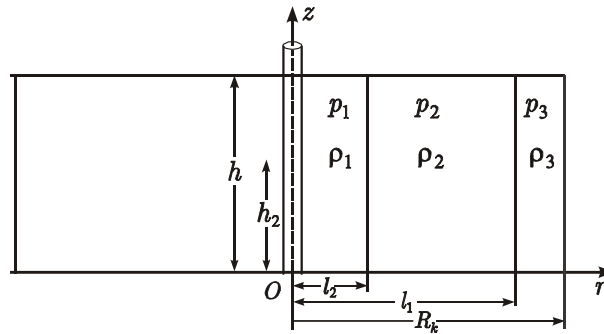


Рис. 1.

В первой - призабойной зоне выделенная жидкая фаза - конденсат выпадает и находится в неподвижном состоянии; во второй - промежуточной зоне двигаются обе фазы, а в третьей приконтурной зоне жидкая фаза вообще не имеется, двигается только газовая фаза.

В силу указанных рассуждений в первой и третьей зоне решается только первое уравнение системы (1), а во второй зоне решается система совместно и при этом для каждого случая выбираются соответствующие условия из (2).

Надо отметить, что границы зон подвижны и на них ставятся следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} p_1(r, z, t) = p_2(r, z, t), \quad \frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r} \quad \text{при } r = \ell_2(z, t); \\ p_2(r, z, t) = p_3(r, z, t), \quad \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{\partial p_3}{\partial r} \quad \text{при } r = \ell_1(z, t); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где p_1, p_2, p_3 - текущие давления в соответствующих зонах, ℓ_1 и ℓ_2 границы зон.

Рассмотренная задача решается численно. Но для этого предварительно систему (1) и условия (2), (3) запишем в векториальном виде [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} [AU] = \frac{k}{m} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rB \frac{\partial U}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[B \frac{\partial U}{\partial z} \right] \right\}, \quad (4)$$

$$U = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} const \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{при } t = 0, r_c \leq r \leq R_k, 0 \leq z \leq h,$$

$$B \frac{\partial U}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{при } z = 0 \text{ и } h, r_c \leq r \leq R_k;$$

$$\left. \begin{aligned} U = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} const \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{в I фазе течения;} \\ B \frac{\partial U}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{во II фазе течения;} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } r = R_k, 0 \leq z \leq h \quad (5)$$

$$U = \begin{vmatrix} p_c(t) \\ \rho_c(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_k(t) - \Delta p \\ \rho_c(t) \end{vmatrix} \quad \text{при } \Delta p = const, r = r_c, h_1 \leq z \leq h$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 = U_2, \quad \frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial r} \quad \text{при } r = \ell_2(z, t), 0 \leq z \leq h, \\ U_2 = U_3 = \begin{vmatrix} p_k \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial r} = \frac{\partial U_3}{\partial r}, \quad \text{при } r = \ell_1(z, t), 0 \leq z \leq h, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$B \frac{\partial U}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = r_c, \quad 0 \leq z \leq h_1; \quad (7)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} p \\ \rho \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1-\rho}{Z(p)p_{at}} \beta[1-C(p)\gamma(p)] & \frac{s_k(p)}{a_k(p)} \\ \frac{1-\rho}{Z(p)p_{at}} \beta C(p) & \frac{1}{a_k(p)} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{k_q(\rho)p}{\mu_q(p)Z(p)p_{at}} \beta[1-C(p)\gamma(p)] + \frac{k_k(\rho)s_k(p)}{\mu_k(p)a_k(p)} & 0 \\ \frac{k_k(\rho)}{\mu_k(p)a_k(p)} + \frac{k_q(\rho)p\beta C(p)}{\mu_q(p)Z(p)p_{at}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полученные выражения на узлах сетки (r_i, z_j, t_n) заменяются разностной системой, которая исходную систему аппроксимирует к разностной системе с погрешностью $\varepsilon_{i,j}^n = O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$, т.е. схема имеет первый порядок аппроксимации. В этом случае аппроксимация имеет следующий вид

$$\frac{A_{i,j}^{n+1} U_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^n U_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{k}{mb_1} \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) B_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}}{b_1} - \left(i - \frac{1}{2} \right) B_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}}{b_1} \right] +$$

$$+ \frac{k}{mb_2} \left[B_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}}{b_2} - B_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{b_2} \right]$$

$$i = \overline{1, (N_1 - 1)}, j = \overline{1, (N_2 - 1)}, n = \overline{1, 2, \dots}$$

$$U_{i,j}^0 = \begin{pmatrix} \text{const} \\ 0 \end{pmatrix}, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$$

$$B_{0,j}^{n+1} U_{1,j}^{n+1} - B_{0,j}^{n+1} U_{i,j}^{n+1} = \begin{pmatrix} p_c(t) \\ \rho_c(t) \end{pmatrix}_{0,j}^{n+1}$$

$$j = N_2^1 + 1; N_2^1 + 2, \dots, N_2^{11} - 1; 0 \leq N_2^1 < N_2^{11} \leq N_2;$$

$$B_{1,j}^{n+1} U_{1,j}^{n+1} - B_{0,j}^{n+1} U_{0,j}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$j = \overline{0, 1, \dots, N_2^1}; N_2^{11}, N_2^{11} + 1, \dots, N_2;$$
(8)

$$\left. \begin{aligned}
U_{N_1-1,j}^{n+1} - 2U_{N_1,j}^{n+1} + U_{N_1+1,j}^{n+1} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad j = \overline{0, N_2}; \\
U_{N_1-1,j}^{n+1} - 2 \begin{vmatrix} P_k \\ 0 \end{vmatrix} + U_{N_1+1,j}^{n+1} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad j = \overline{0, N_2}; \\
U_{N_1,j}^{n+1} = \begin{vmatrix} P_0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} const \\ 0 \end{vmatrix}, \quad j = \overline{0, N_2}; \quad I \text{ фаза} \\
B_{N_1,0}^{n+1} U_{N_1-1,j}^{n+1} - B_{N_1,j}^{n+1} U_{N_1,j}^{n+1} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad j = \overline{0, N_2}; \quad II \text{ фаза} \\
B_{i,0}^{n+1} U_{i,0}^{n+1} - B_{i,0}^{n+1} U_{i,1}^{n+1} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \\
B_{i,N_2}^{n+1} U_{i,N_2-1}^{n+1} - B_{i,N_2}^{n+1} U_{i,N_2}^{n+1} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь шаги сетки: τ - по времени, b_1 - по координате r , b_2 - по координате Z .

Таким образом, получена система нелинейных уравнений в матричной форме. Для линейризации ее проводятся некоторые замены, после чего полученные коэффициенты и векторы по времени сдвигаем на один слой и вновь проводя некоторые замены получаем систему трехдиагональных линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned}
B_{0,j}^n U_{1,j}^{n+1} - B_{0,j}^n U_{0,j}^{n+1} &= -F_{0,j}^n \\
A_{i,j}^n U_{i-1,j}^{n+1} - C_{0,j}^n U_{i,1}^{n+1} + B_{0,j}^n U_{i,1}^{n+1} &= -F_{i,j}^n \quad i = \overline{1, (N-1)} \\
B_{N,j}^{n+1} U_{N-1,j}^{n+1} - B_{N,j}^n U_{N,j}^{n+1} &= -F_{N,j}^n
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Полученные коэффициенты выписывая без штрихов и заменяются соответственно $A_{i,j}^n, B_{i,j}^n, C_{i,j}^n$. Анализ этих коэффициентов показывает, что матрицы $B_{0,j}^n$ и $B_{N,j}^n$ имеют обратные матрицы

$$\det(B_{0,j}^n) = \frac{1}{k} \psi_{0,j}^n + 1 > 0; \quad \det(B_{N,j}^n) = \frac{1}{k} \psi_{N,j}^n + 1 > 0,$$

где

$$\psi = \frac{k_q(\rho) p \beta [1 - C(p) \gamma(p)]}{\mu_q(p) Z(p) p_{at}} + \frac{k_k(\rho) s_k(p)}{\mu_k(p) a_k(p)}.$$

Следовательно

$$(C_{i,j}^n)^{-1} \cdot A_{i,j}^n = \begin{Bmatrix} a'_{11} & 0 \\ a'_{21} & 0 \end{Bmatrix}, (C_{i,j}^n)^{-1} \cdot B_{i,j}^n = \begin{Bmatrix} b'_{11} & 0 \\ b'_{21} & 0 \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$a'_{11} = \frac{\left(i - \frac{1}{2}\right) \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + imb_1^2}{\left(\frac{1}{2} + i\right) \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n + \left(i - \frac{1}{2}\right) \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + imb_1^2};$$

$$a'_{21} = -\frac{k\left(i + \frac{1}{2}\right) \phi_{i+\frac{1}{2},j}^n + k\left(i - \frac{1}{2}\right) \phi_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\left(\frac{1}{2} + i\right) \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n + \left(i - \frac{1}{2}\right) \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + imb_1^2} \left(\frac{i - \frac{1}{2}}{imb_1^2} \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + 1\right) + \frac{k\left(i - \frac{1}{2}\right)}{imb_1^2} \phi_{i-\frac{1}{2},j}^n;$$

$$b'_{11} = \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right) \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n + imb_1^2}{\left(i + \frac{1}{2}\right) \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n + \left(i - \frac{1}{2}\right) \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + imb_1^2};$$

$$b'_{21} = -\frac{k\left(i + \frac{1}{2}\right) \phi_{i+\frac{1}{2},j}^n + k\left(i - \frac{1}{2}\right) \phi_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\left(i + \frac{1}{2}\right) \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n + \left(i - \frac{1}{2}\right) \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + imb_1^2} \left(\frac{i + \frac{1}{2}}{imb_1^2} \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n + 1\right) + \frac{k\left(i + \frac{1}{2}\right)}{imb_1^2} \phi_{i+\frac{1}{2},j}^n;$$

$$\phi = \frac{k_k(\rho)}{\mu_k(p)a_k(p)} + \frac{k_q(\rho)p_\beta C(p)}{\mu_q(p)Z(p)p_{at}}.$$

Как видно из вышеуказанных выражений $a'_{11} > 0, b'_{11} > 0$.

Анализируя полученные выражения заключаем, что к системе (8) можно применить метод матричной прогонки и этот метод устойчив и был применен.

При вычислениях зависимости параметров газа и конденсата (жидкой фазы) от давления и относительных фазовых проницаемостей от насыщенности жидкой фазы взяты из работы [2] в следующем виде:

$$\mu_q(p) = 0,0126 + 0,257 \cdot 10^{-4} p + 0,1633 \cdot 10^{-7} p^2;$$

$$\mu_k(p) = 0,06 - 0,3295 \cdot 10^{-2} p + 0,1044 \cdot 10^{-4} p^2 - 0,1558 \cdot 10^{-7} p^3 + 0,85 \cdot 10^{-11} p^4;$$

$$a_k(p) = 1,116 + 0,1157 \cdot 10^{-2} p + 0,23674 \cdot 10^{-6} p^2;$$

$$C(p) = 0,637 \cdot 10^{-4} - 0,5057 \cdot 10^{-6} p + 0,6265 \cdot 10^{-8} p^2 - 0,1595 \cdot 10^{-10} p^3 + \\ + 0,13 \cdot 10^{-13} p^4;$$

$$Z(p) = 1,0 - 0,11622 \cdot 10^{-2} p + 0,3744 \cdot 10^{-5} p^2 - 0,2965 \cdot 10^{-9} p^3 - \\ - 0,1975 \cdot 10^{-11} p^4;$$

$$s_k(p) = 0,814286 p;$$

$$\gamma(p) = 194,899 \cdot -0,42974 \cdot 10^{-1} p + 0,1335 \cdot 10^{-4} p^2 - 0,6053 \cdot 10^{-6} p^3 + \\ + 0,622 \cdot 10^{-9} p^4;$$

$$k_q(\rho) = 2,0833 \rho^4 + 4,9167 \rho^3 - 5,5708 \rho^2 - 0,277 \rho + 0,882;$$

$$k_k(\rho) = 1,8864 \rho^2 + 0,1889 \rho + 0,0005.$$

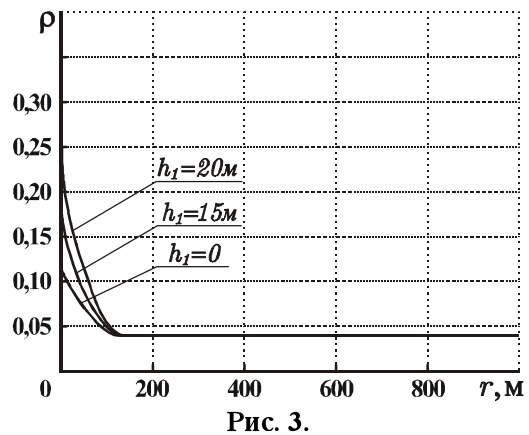
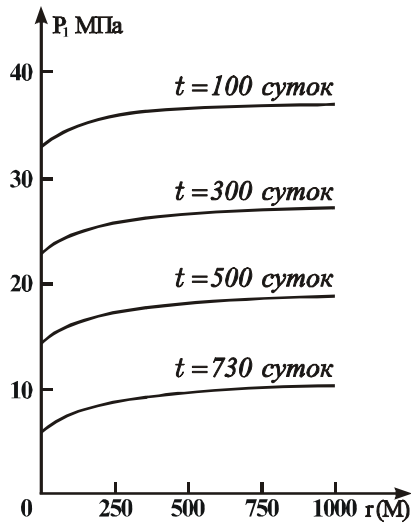
Эти выражения предложены на основе обработки данных, полученных из определенного состава смеси. Последние два выражения справедливы при $\rho \leq 0,46$.

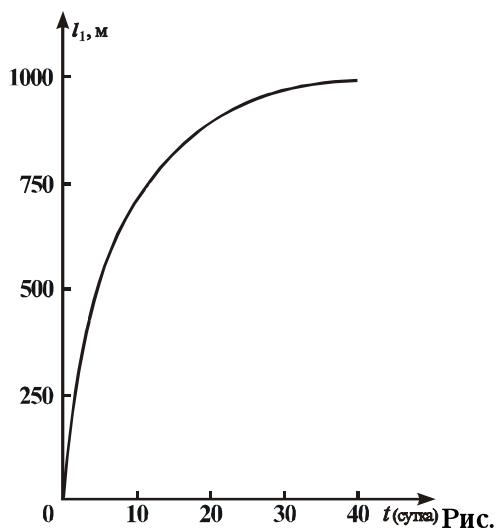
Численные работы были проведены при следующих данных:

$$p_0 = 40 \text{ МПа}, \quad h = 30 \text{ м}, \quad r_c = 0,1 \text{ м}, \quad R_k = 1000 \text{ м}, \quad \beta = 0,81, \quad k = 0,05 \text{ мкн}^2;$$

$$h_1 = 10 \text{ м}, 20 \text{ м}, 30 \text{ м}, \quad \Delta p = 4 \text{ МПа}.$$

На основании проведенных расчетов были построены графики распределения пластового давления и насыщенности от расстояния для различных моментов времени при $h_1 = 15 \text{ м}$ и графики изменения границ зон от времени (рис. 2-5).





4.

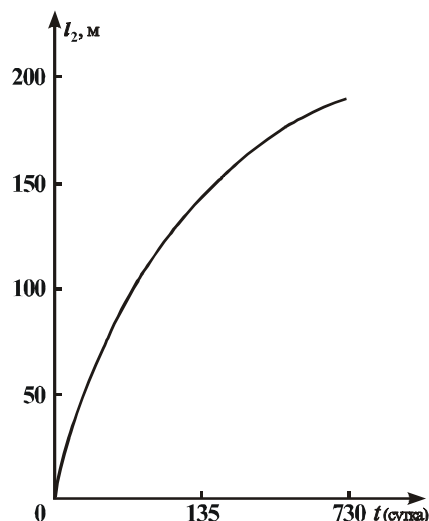


Рис. 5.

По полученным результатам сделаны следующие выводы. Время истощения области течения (пласта), при вскрытии скважиной толщины на половину (15 м) составляет 730 суток. В конце истощения максимальное значение насыщенности в области течения достигает значения 0,19. Граница второй области $l_1(t)$ достигает контура (границы) области за 40 суток, а граница первой области $l_2(t)$ продвигается за это время на 200 м. При уменьшении вскрытия пласта скважиной насыщенность уменьшается, а время истощения увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Т.Аббасов, Ф.Г.Гасанов, Ф.Г.Оруджалнев. О фильтрации газоконденсатной смеси. ДАН Азерб ССР, 1966, №4, стр.93-99.
2. М.Т.Аббасов, М.А.Расулов, Х.А.Фейзуллаев. Численное решение задач фильтрации газоконденсатной смеси. Изв. АН Азерб. ССР, сер. Наук о Земле, №1, 1991, стр. 21-32.
3. Б.Ю.Бабанлы, Р.М.Велиев, Т.Г.Рамазанов. Плоско-радиальная фильтрация газоконденсатной смеси с учетом фазовых переходов. Труды мат.центра им. Лобачевского, НИИ математики и механики им.Чеботарева Казанского Государственного Университета, Том 7, Краевые задачи аэрогидромеханики и их приложения, г.Казань, 2000, стр. 43-49.
4. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений, М. «Наука», 1978.

**İKİFAZALI BİNAR SİSTEMİN SÜZÜLMƏ PROSESİNİ TƏSVİR EDƏN
QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ**

V.R.İBRAHİMOV, T.Q.RAMAZANOV, V.Y.BABANLI

ANNOTASIYA

Məsəməli mühitin bircins-izotrop oblastında yerləşən mərkəzi natamam quyuya ikifazlı qazkondensat sistemin qərarlaşmamış süzülməsinin fəza məsələsinə baxılır. Aparılmış hesablamalar nəticəsində zamanın hər bir anında təzyiq paylanması və doyma əmsalının məsafədən asılılığı və sərhədlərin dəyişmə qrafikləri qurulmuşdur.

**NUMERICAL SOLUTION OF SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS
DESCRIBING THE FILTRATION PROCESS
OF TWO-PHASE BINARY SYSTEM**

V.R.IBRAHIMOV, T.K.RAMAZANOV, V.Yu.BABANLY

ABSTRACT

In this paper we consider a space problem on nonstationary filtration of two-phase gas condensate system to a center imperfect hole in the homogeneous isotropic domain of porous medium. The movement of boundaries of zone on time is numerically investigated by the approximate method worked out by us.